UNE MÉTHODE DE CALIBRATION DES MAGNITUDES ABSOLUES ET AUTRES PARAMÈTRES FONDAMENTAUX

F. Arenou

DASGAL, URA 335 du CNRS
Observatoire de Paris-Meudon-Nançay
Place J. Janssen, 92195 Meudon Cedex, France

RÉSUMÉ

Une méthode par maximum de vraisemblance a été développée, qui permet d'obtenir une estimation non biaisée de la magnitude absolue, en utilisant l'ensemble des données observées : astrométriques, photométriques, cinématiques. L'algorithme a été appliqué au problème « inverse » : déterminer le point-zéro des parallaxes Hipparcos, à partir d'un échantillon d'étoiles dont la magnitude absolue est connue.

1. INTRODUCTION

La calibration des magnitudes absolues a pour but final d'obtenir une estimation de la magnitude absolue d'une étoile, comme fonction d'indices de couleur ou de données spectroscopiques (Gómez *et al.*, 1995). Cette estimation doit être non biaisée, et donc s'être affranchie des biais de « Malmquist » (1936) – dû à une sélection sur la magnitude apparente –, de « Lutz et Kelker » (1973) – sélection sur la parallaxe observée – ou d'un biais cinématique – sélection sur le mouvement propre –. Pour tenir compte de ces biais, il faut se donner des hypothèses sur les lois de distribution des observables, et y inclure explicitement les censures effectuées.

La méthode qui est décrite ci-dessous permet d'obtenir une estimation de différents paramètres qui produisent les observations avec la plus grande probabilité. L'ensemble de l'algorithme est développé en détail, et une application à la recherche du point-zéro des parallaxes Hipparcos est également décrite.

2. MÉTHODE

L'ensemble O des observables considérés sont la parallaxe observée $\pi_\circ$, la magnitude apparente m, les mouvements propres μ_α, μ_δ, la vitesse radiale V_R. Leurs erreurs formelles associées, les indices de couleurs I, mais aussi le $v \sin i$, ou la métallicité, etc. – qui peuvent servir de variables indépendantes pour la calibration de la magnitude absolue $M_V = M_V(I, v\sin i, ...)$ – sont également des données observationnelles qui sont prises en compte dans le modèle[1].

L'ensemble Θ des paramètres, ce sont d'abord les coefficients C_k qui interviennent dans la relation $M_V = M_V(I, v\sin i, ...)$, mais ce peut être également l'échelle moyenne de hauteur du plan galactique, son échelle de longueur, les vitesses moyennes, dispersions et covariances, de l'échantillon considéré, etc.

La liste est non exhaustive, et il est possible d'ajouter des observables et des paramètres supplémentaires dans le modèle. Rien n'oblige à utiliser tous les $O = (\pi_\circ, l, b, m, \mu_\alpha, \mu_\delta, V_R)$ et $\Theta = (C_k, h_Z, h_R, \overline{U}, \overline{V}, \overline{W}, \sigma_{UU}, \sigma_{VV}, \sigma_{WW}, \sigma_{UV}, \sigma_{UW}, \sigma_{VW})$, et l'implantation de l'algorithme permet de sélectionner ceux qui seront utilisés.

La probabilité $g(O|\Theta)$ d'observer les observables O d'une étoile sachant les paramètres Θ peut s'écrire :

$$g(O|\Theta) = \int_0^{+\infty} h(O|\pi, \Theta) p(\pi) d\pi \tag{1}$$

Cette écriture conditionnelle à π permet de décomposer la fonction de densité de probabilité (pdf) $h(O|\pi, \Theta)$ comme le produit des pdfs conditionnelles qui sont maintenant indépendantes[2] :

$$h(O|\pi, \Theta) = p_1(\pi_\circ|\pi, \Theta) p_2(m|\pi, \Theta) p_3(\mu_\alpha, \mu_\delta, V_R|\pi, \Theta) p_4(l, b|\pi, \Theta) \tag{2}$$

où la magnitude absolue, ainsi qu'une possible correction de l'absorption interstellaire (Arenou *et al.*, 1992), interviennent[3] dans la pdf $p_2(m|\pi, \Theta)$.

2.1. Biais de sélection

L'éventuelle censure sur un des observables o (parmi tous les observables O) peut être prise en compte explicitement dans ces pdfs. En effet, si l'on note $q_j(o|\pi, \Theta)$ la densité conditionnelle en l'absence de censure :

$$p_j(o|\pi, \Theta) = \left| \begin{array}{l} \frac{q_j(o|\pi,\Theta)}{\int_{o_{\min}}^{o_{\max}} q_j(o|\pi,\Theta) do} \text{ si } o \in [o_{\min}, o_{\max}] \\ 0 \text{ sinon.} \end{array} \right. \tag{3}$$

[1]Pour ne pas alourdir la notation, on ne les écrira pas dans les densités utilisées ci-dessous.

[2]On suppose que les corrélations entre les erreurs des paramètres astrométriques sont négligeables.

[3]La magnitude apparente est supposée connue sans erreur ; dans le cas contraire, il faudrait utiliser $p_2(m_o|\pi, \Theta) = \int a(m_o|m) b(m|\pi, \Theta) dm$.

Ouvrons une parenthèse concernant les différentes censures qui peuvent être faites sur les observables ; autant celle sur la magnitude apparente peut rarement être évitée, autant celle sur la parallaxe observée est difficilement justifiable : la méthode exposée ici permet d'utiliser toutes les parallaxes observées, même négatives[4].

Les densités conditionnelles $q_j(o|\pi,\Theta)$ que l'on utilisera doivent naturellement être réalistes. Par exemple $q_1(\pi_\circ|\pi,\Theta)$ reflétant les erreurs de mesures sur la parallaxe observée peut être prise gaussienne ; le même choix pour la loi d'erreur sur la magnitude absolue (dans $q_2(m|\pi,\Theta)$) n'est pas forcément judicieux. Pour laisser la généralité au modèle, les $q_j(o|\pi,\Theta)$ seront supposées connues, un exemple d'application étant donné au §3.1.

2.2. Estimation des paramètres

Une fois les $p_j(.)$ connues, l'estimateur par maximum de vraisemblance des paramètres inconnus Θ est celui qui maximise la log-vraisemblance de notre n-échantillon :

$$\ln\ \mathcal{L} \ = \ \sum_{i=1}^{n} \ln g(O_i|\Theta) \tag{4}$$

ce qui permet ainsi de déterminer numériquement les paramètres inconnus à l'aide des Eqs. (1)-(3) et des observables O_i de chaque étoile i.

Si l'on connaît *a priori* la densité des paramètres, $d(\Theta)$, une variante bayésienne consiste à utiliser, au lieu de $g(O|\Theta)$, la pdf *a posteriori* :

$$G(\Theta|O) \ = \ \frac{g(O|\Theta)d(\Theta)}{\int g(O|\Theta)d(\Theta)d\Theta} \tag{5}$$

Une seconde variante est celle utilisée par Ratnatunga et Casertano (1991), qui se ramènent dans le domaine de la parallaxe observée $\pi_\circ$ en utilisant, à la place de $g(O|\Theta)$, la pdf :

$$C(\pi_\circ|m,\Theta) \ = \ \frac{g(\pi_\circ,m|\Theta)}{\int g(\pi_\circ,m|\Theta)d\pi_\circ} \tag{6}$$

La démarche qui est présentée ici (Eq. 1-3) est de portée plus générale, d'abord parce qu'elle peut utiliser l'essentiel des observables – sans en privilégier l'un d'eux –, ensuite parce qu'elle prend en compte de manière naturelle les diverses censures sur les observables, et enfin puisqu'elle permet de déterminer un ensemble de paramètres qui n'est pas réduit à ceux liés à la magnitude absolue. En revanche, l'utilisation des expressions (5) ou (6) présente l'avantage de normaliser la densité $g(O|\Theta)$, si l'une des $p_j(.)$ n'est connue qu'à une constante multiplicative près.

Dans ce qui suit, nous supposerons que les paramètres ont été obtenus numériquement et sont fixés. La précision formelle de ces paramètres et les corrélations formelles entre eux

[4] qui apportent quand même l'information suivante : la vraie parallaxe est voisine de 0.

sont alors obtenues en calculant l'inverse de la matrice d'information de Fisher (espérance du carré des dérivées partielles de la log-vraisemblance).

2.3. Qualité de l'ajustement

Une pdf intéressante est la densité d'un des observables o – en particulier la parallaxe observée – sachant les autres observables et les paramètres :

$$P(o|...,\Theta) \quad = \quad \frac{g(O|\Theta)}{\int_{o_{\min}}^{o_{\max}} g(O|\Theta)do} \tag{7}$$

Son premier intérêt est de permettre de simuler des échantillons semblables à celui utilisé pour la calibration (cf §2.4.).

Mais, de plus, il est possible de « prédire » l'observable o, en calculant par exemple l'espérance de la loi conditionnelle P :

$$\widehat{o} \quad = \quad \int_{o_{\min}}^{o_{\max}} oP(o|...,\Theta)do \tag{8}$$

ainsi que sa variance $\sigma^2_{\widehat{o}}$, et donc de calculer le résidu normalisé :

$$\delta_o = \frac{o - \widehat{o}}{\sqrt{\sigma^2_o + \sigma^2_{\widehat{o}}}} \tag{9}$$

Si l'ajustement des paramètres a été correct, alors les résidus δ_o sont de moyenne nulle et de variance 1, ce que l'on peut tester en utilisant leurs équivalents empiriques sur l'échantillon. Une grande variance empirique peut être l'indice de la présence de points aberrants, qui sont l'objet du paragraphe suivant.

2.4. Simulations, points aberrants et précision

La loi exacte que suivent les résidus n'est pas triviale, c'est pourquoi la recherche et l'élimination d'éventuels points aberrants se fait par simulation : pour chaque étoile, l'observable o est tiré « aléatoirement » suivant la loi (7). L'échantillon ainsi reconstitué, on fait une nouvelle estimation des paramètres, puis on calcule les résidus pour chaque étoile. Sur chaque échantillon simulé, on s'intéresse alors aux valeurs extrêmes des résidus (la plus petite et la plus grande). Au bout d'un certain nombre de simulations, on obtient donc un intervalle de confiance (par exemple à 95%) pour les résidus.

Quand cet intervalle de confiance est obtenu, il ne reste plus qu'à tester pour chaque étoile de l'échantillon réellement observé si son résidu est dans l'intervalle. Si ce n'est pas le cas, l'étoile est éliminée, et l'ensemble du processus d'estimation est relancé.

Il faut mentionner que ces simulations permettent également de calculer les erreurs sur les paramètres obtenus, donc de vérifier celles qui ont été calculées par l'intermédiaire des dérivées de la log-vraisemblance.

2.5. Estimation de la vraie parallaxe

Une fois les calibrations effectuées, il est tentant d'essayer d'obtenir pour une étoile l'estimation de sa vraie parallaxe, connaissant les différents paramètres et observables[5]. Un estimateur possible est l'espérance *a posteriori* de la parallaxe, qui s'écrit :

$$\widehat{\pi} = E[\pi|O,\Theta] = \frac{\int_0^{+\infty} \pi h(O|\pi,\Theta)p(\pi)d\pi}{g(O|\Theta)} \tag{10}$$

Les propriétés de cet estimateur ne seront pas plus longuement développées ici, que ce soit dans son utilisation individuelle ou bien pour calculer la parallaxe moyenne de l'échantillon utilisé.

3. APPLICATION

La méthode exposée ci-dessus permet de calibrer la magnitude absolue ; inversement, la méthode peut également permettre, si la magnitude absolue est connue, d'obtenir des paramètres liés à la parallaxe trigonométrique observée.

Les parallaxes Hipparcos doivent être des parallaxes absolues, mais elles pourraient avoir un point-zéro non nul s'il y avait eu une variation périodique de l'angle de base du miroir du satellite. Pour infirmer cette hypothèse -peu probable-, l'exactitude des parallaxes doit être vérifiée de façon externe. De plus, les erreurs formelles sur les parallaxes doivent également être vérifiées.

Compte tenu de la précision des parallaxes fournies par Hipparcos, aucune mesure au sol ne peut rivaliser avec elles (sauf celles obtenues par VLBI, mais qui sont trop peu nombreuses). Une des seules méthode consiste à observer les parallaxes des étoiles lointaines, pour lesquelles la parallaxe Hipparcos ne reflète que l'erreur de mesure (due essentiellement au bruit de photon et à la loi de balayage du satellite).

Les parallaxes qui ont été utilisées sont celles du catalogue intermédiaire d'Hipparcos après 30 mois de mission. L'échantillon utilisé contient toutes les étoiles pour lesquelles on a pu calculer individuellement une magnitude absolue et une absorption, à l'aide de la photométrie uvbyβ (Arenou, 1993). On a calculé le module de distance t pour ces étoiles et n'ont été conservées que celles avec $8.5 < t < 14.5$ (487 étoiles) ; ici intervient donc directement une censure, due au fait que l'on ne veut conserver que les étoiles distantes.

[5]Ceci n'est évidemment intéressant qu'au delà de quelques centaines de pc, là où l'erreur relative sur les parallaxes trigonométriques devient importante.

3.1. Densités utilisées

Dans ce qui suit, nous noterons $\mathcal{G}_x(\mu,\sigma)$ une pdf gaussienne de la variable x de moyenne μ et de variance σ^2. En utilisant diverses estimations, l'hypothèse gaussienne des erreurs sur les parallaxes observées peut être acceptée (Arenou *et al.*, 1995), si bien que l'on peut choisir comme pdf $q_1 = \mathcal{G}_{\pi_o}(\pi + z, k\sigma_{\pi_o})$, où z est le point-zéro global des parallaxes Hipparcos, σ_{π_o} leur erreur formelle, et k l'erreur de poids unitaire, z et k étant les deux seuls paramètres recherchés.

Il n'y a pas besoin d'adopter une loi particulière pour ce qui concerne la distribution $p(\pi)$ des vraies parallaxes. En effet, le dernier produit de l'Eq. (1) est proportionnel à la densité spatiale en coordonnées cartésiennes héliocentrique (Arenou *et al.*, 1995) :

$$p_4(l,b|\pi,\Theta)p(\pi) = \frac{\cos b}{\pi^4} f(X,Y,Z|\Theta) \tag{11}$$

Cette dernière pdf peut par exemple être décomposée comme le produit d'une distribution exponentielle dans le plan et d'une distribution exponentielle en Z, d'échelle de hauteur h_Z. En ne conservant que cette dernière, on obtient :

$$p_4(l,b|\pi,\Theta)p(\pi) \propto \frac{\cos b}{2h_Z\pi^4} e^{-\frac{|\sin b|}{\pi h_Z}} \tag{12}$$

Compte tenu de l'échantillon utilisé, on a fixé $h_Z = 100$ pc.

Pour cette application la pdf « cinématique » p_3 n'a pas été utilisée. Les lois sur les erreurs de la magnitude absolue, la magnitude apparente et l'absorption ont été considérées gaussiennes, d'où : $q_2(t|\pi) = \mathcal{G}_t(-5\log\pi - 5, \sigma_t)$.

En utilisant l'algorithme, on a obtenu : $z = -0.02 \pm 0.06$ mas et $k = 1.014 \pm 0.034$, avec un coefficient de corrélation $\rho(z,k) = -0.19$, montrant qu'il n'y a pas d'erreur systématique supérieure à 0.1 mas, et que, d'autre part, les erreurs formelles sur les parallaxes sont correctement estimées.

4. CONCLUSION

Le modèle qui a été décrit dans les pages précédentes s'applique à la calibration de la magnitude absolue en fonction d'indices de couleur, de données spectroscopiques, ou plus directement des paramètres intrinsèques comme $T_{\rm eff}$, g, [Fe/H]. D'autres paramètres importants (échelles, caractéristiques cinématiques) peuvent être simultanément obtenus. Le modèle utilise les observables astrométriques, photométriques et cinématiques qui sont connus, en tenant compte non seulement de la précision de leur mesure, mais également des censures qui ont pu leur être appliquées.

La méthode se base sur le fait que si l'on travaille conditionnellement à la vraie parallaxe, alors on peut séparer les densités relatives aux différents observables. Une attention particulière a été apportée aux différents aspects de l'estimation : obtention de multiples paramètres et de leur matrice de variance-covariance, gestion des points aberrants, tests de la qualité de l'ajustement, simulations d'échantillons.

D'autres développements sont en cours : gestion de plusieurs populations aux caractéristiques différentes, ajout d'autres types de densité, etc. Le modèle devrait être finalisé pour l'arrivée des données d'Hipparcos, et en permettre ainsi une utilisation optimale.

REMERCIEMENTS

Ce travail est le fruit de longues discussions avec A. Gómez qui est ici remerciée. J. Rousseau et J-F. Becquaert ont également contribué respectivement à certains aspects statistiques et cinématiques.

5. RÉFÉRENCES

Arenou, F., Grenon, M., Gómez A.E., 1992, A tridimensional model of the galactic interstellar extinction, *Astron. Astrophys.* **258**, 104-111.

Arenou, F., 1993, Contribution à la validation statistique des données d'Hipparcos: Catalogue d'Entrée et données préliminaires, *thèse de Doctorat*, Observatoire de Paris.

Arenou, F., et al., 1995, Zero-point and external errors of Hipparcos parallaxes, *Astron. Astrophys.*, sous presse (vol. 304)

Gómez, A.E., Mennessier, M-O., 1995, Calibration des magnitudes absolues, ce volume.

Lutz, T. E., Kelker, D. H., 1973, *Publ. Astron. Soc. Pac.* **85**, 573.

Malmquist, K.G., 1936, *Meddel. Stockholm Obs.* **26**.

Ratnatunga, K. U., Casertano, S., 1991, *Astron. J.* **101**, 1075.